Sự đệ quy và bài toán tổng lũy thừa

Trần Việt Khoa
tvkhoa.husc@gmail.com,
Khoa Công nghệ thông tin, Đại học Khoa học Huế

Ngày 22 tháng 3 năm 2017

1 Sự đệ quy

Về vấn đề này được trình bày rất nhiều trong các sách về lập trình, đây là một kỹ thuật lập trình rất hay được áp dụng rất nhiều trong việc giải một bài toán tin. Tuy nhiên ta cần hiểu rỏ bản chất để không áp dụng một cách máy móc. Cứ không phải bài toán nào cũng sử dụng kỹ thuật này để lập trình, ví dụ bạn không thể dùng đệ quy để tính phần tử thứ n của dãy fibonacci được, [1] tương tự bạn không nên dùng đệ quy để in tất cả các phần tử trong một List (Danh sách liên kết) bởi vì bộ nhớ dành cho Stack không đủ để chứa hết lời gọi hàm đệ quy của bạn.

Sự đệ quy được dùng một cách hữu hiệu trong kỹ thuật lập trình **chia để trị**, nó làm tăng tốc độ tính toán mà cụ thể là bạn đã gặp qua các thuật toán như sau: Lũy thừa nhị phân, sắp xếp trộn (merge sort), sắp xếp nhanh (quick sort), tìm kiếm nhị phân (binary search), ...

Một tính chất cực kỳ quan trọng nữa của sự đệ quy đó là tính tổng quát hóa vấn đề, không phải bài toán nào cũng tìm được phương pháp giải một cách tường minh, một số bài được giải qua phương pháp tổng quát hóa đó chính là sự đệ quy. Bằng phương pháp này người lập trình tìm ra được công thức tổng quát hóa cho bài toán, rồi sau đó dùng các kỹ thuật để tối ưu hóa thuật toán (theo thời gian, bộ nhớ) đơn cử là thuật toán đệ quy quay lui, thuật toán quy hoạch động.

Để hiểu rỏ bản chất vấn đề, bài toán tổng lũy thừa, tham khảo [1] sau cho ta cách nhìn về sự đệ quy.

2 Tổng lũy thừa

2.1 Lịch sử một phát minh nhỏ

Có một giai thoại về cậu bé Gao-xơ mà sau này trở thành nhà toán học vĩ đại, lúc Gau-xơ còn đang học tiểu học. Một hôm thầy giáo ra một bài toán khó như sau: cộng các số 1, 2, 3, ..., cho đến 20. Gau-xơ đã đưa ra đáp án là 210 đúng và nhanh nhất làm thầy giáo vô cùng ngạc nhiên. Vậy Gau-xơ đã giải như thế nào, cậu bé phát hiện ra rằng với từng cặp số 1 và 20, 2 và 19, 3 và 18, cứ như vậy đến cặp cuối là 10 và 11, mỗi cặp có tổng là 21 và tổng cần tính là $10 \times 21 = 210$

Ngày nay, chúng ta đã quá quen thuộc với bài toán này, nó được khái quát hóa như sau: *tìm tổng của n số nguyên dương đầu tiên.*

Ý tưởng giải xuất phát từ Gau-xơ như sau: viết tổng S hai lần, trong dòng thứ hai thay đổi thứ tự ngược lại.

[1]thuật toán tồi tệ nhất, http://www.procul.org/blog/2012/02/07/

$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$

$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1$

Cộng vế theo vế ta có:

$2S = n(n+1) \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$

Đó chính là công thức tổng quát, khi n=20 công thức cho kết quả 210 như kết quả của Gau-xơ.

2.2 Trời cho

Bài toán tương tự: *Tổng các bình phương của n số tự nhiên đầu tiên.*

Ký hiệu: $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

Phương pháp để tính tổng này là không dễ thấy. Một đặc điểm của con người là thường lặp lại những cách thức từng giúp ích trước đây cho tình huống tương tự, cụ thể:

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2$

$S = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2$

Tuy nhiên khi cộng vế theo vế thì ở đây không đem lại điều bổ ích gì cả, ý đồ thất bại.

Vậy bài toán trên giải như thế nào?

May sao, trời cho ta có một công thức quen thuộc về lập phương của tổng hai số:

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$

Công thức này đúng với mọi n, ta thay lần lượt các giá trị của n, ta có:

$2^3 - 1^3 = 3.1^2 + 3.1 + 1$, với n=1,

$3^3 - 2^3 = 3.2^2 + 3.2 + 1$, với n=2,

$4^3 - 3^3 = 3.3^2 + 3.3 + 1$, với n=3,

$\ldots\ldots\ldots$

$(n+1)^3 - n^3 = 3.n^2 + 3n + 1.$

Cộng vế theo vế ta có:

$(n+1)^3 - 1 = 3S + 3\frac{n(n+1)}{2} + n \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Như vậy ta có được S, lời giải của bài toán xuất hiện một cách đột ngột, giống như *trời cho*, tuy nhiên cách giải đó không làm ta hài lòng, nó không có một chỉ dẫn nào về nguồn gốc của lời giải.

Dẫu sao nó cũng đáng được chú ý!

Ta bắt đầu khái quát hóa. Hãy xét bài toán tương tự hai bài toán trên, phát biểu tổng quát lại như sau: *tính tổng lũy thừa bậc k của n số tự nhiên.* $S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$.

Ta đã có: $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ và có thể thêm vào một trường hợp đặc biệt hiển nhiên [2] $S_0 = n$.

[2] vì $1^0 + 2^0 + \cdots + n^0 = 1 + 1 \cdots + 1$ n lần = n

2.3 Phép đệ quy

Với S_0, S_1, S_2 theo các cách tính khác nhau trên có mối liên hệ nào không?

Nhìn vào công thức tính S_2 ở trên ta có thể giả thiết rằng S_k được biểu thị dưới dạng một đa thức bậc k+1 đối với n, trong trường hợp tổng quát có thể dùng cái mẹo này.

Bài tập 1: Tính $S_3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

Sau khi tính ta có $S_3 = [\frac{n(n+1}{2}]^2 = (S_2)^2$ [3]

Như vậy, một tia sáng đã xuất hiện. Để tính được giá trị của $S_k(n)$ ta dùng triển khai công thức sau: $(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + \binom{k+1}{1}n^k + \binom{k+1}{2}n^{k-1} + \cdots + 1$

$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \binom{k+1}{1}n^k + \binom{k+1}{2}n^{k-1} + \cdots + 1$

Viết các trường hợp đặc biệt với n = 1, 2, và cộng vế theo vế ta có:

$(n+1)^{k+1} - 1^{k+1} = (k+1)S_k(n) + \binom{k+1}{2}S_{k-1}(n) + \cdots + \binom{k+1}{k-1}S_2(n) + (k+1)S_1(n) + n.$

Thực vậy kiểm chứng lại các giá trị $S_1, S_2, \ldots$:

a. Tính S_1:

Từ hệ thức $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$

Ta viết các trường hợp đặc biệt:

$2^2 - 1^2 = 2.1 + 1$, với n=1,

$3^2 - 2^2 = 2.2 + 1$, với n=2,

$4^2 - 3^2 = 2.3 + 1$, với n=3,

....

$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$

Cộng vế theo vế ta có:

$(n+1)^2 - 1 = 2S_1 + S_0$. Bởi vì $S_0 = n$ nên $S_1 = \frac{(n+1)^2-1-n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

b. Tính S_2:

Hoàn toàn tương tự, ta triển khai hệ thức $(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1 \Leftrightarrow (n+1)^3-n^3 = 3n^2+3n+1.$

$2^3 - 1^3 = 3.1^2 + 3.1 + 1$, với n=1,

$3^3 - 2^3 = 3.2^2 + 3.2 + 1$, với n=2,

$4^3 - 3^3 = 3.3^2 + 3.3 + 1$, với n=3,

....

$(n+1)^3 - n^3 = 3.n^2 + 3n + 1.$

Cộng vế theo vế ta có:

$(n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c. Như vậy ta sẽ tính được S_k dựa vào $S_{k-1}, S_{k-2}, \ldots, S_0$.

[3] Phương pháp, đó là thủ thuật mà bạn sử dụng hai lần

$(n+1)^{k+1} - 1^{k+1} = (k+1)S_k(n) + \binom{k+1}{2}S_{k-1}(n) + \cdots + \binom{k+1}{k-1}S_2(n) + (k+1)S_1(n) + n.$

Nếu ta gặp một dãy sắp thứ tự hoàn toàn, ví dụ dãy S_k trên thì luôn có hy vọng tìm được tất cả các số hạng của nó cái nọ kế tiếp cái kia. Muốn vậy, cần có hai điều kiện:

• Thứ nhất, bằng cách nào đó phải xác định được số hạng đầu tiên của dãy, ví dụ S_0 của dãy trên.

• Thứ hai, phải tồn tại quan hệ ràng buộc số hạng tổng quát của dãy với các số hạng đứng trước nó, ví dụ: S_k liên hệ với các $S_0, S_1, \ldots S_{k-1}$

Nếu có đầy đủ hai yếu tố trên dễ dàng ta xác định được các số hạng bất kỳ của dãy và được gọi là phép đệ quy hay còn được gọi là công thức truy toán, truy hồi.

Bài tập 2. Tìm hệ thức truy hồi cho số xâu nhị phân độ dài n không có hai số 0 liên tiếp.

Bài tập 3. Tìm công thức đệ quy cho số xâu nhị phân độ dài n chứa xâu 01.

Bài tập 4. Tìm hệ thức truy hồi cho số cách đi lên n bậc thang nếu một người có thể bước một, hai hoặc ba bậc một lần.

3 Lập trình với bài toán tổng lũy thừa

Đây là một bài toán quen thuộc trong các kỳ thi lập trình, với bài toán tổng quát $S_k = 1^k + 2^k + \ldots n^k$ mà không tìm được công thức tính như mục trên thì bạn sẽ không qua được bài này với phương pháp giải ngây thơ là:

```
for (i=1; i<=n; i++)
    S += pow(i,k);
return S;
```

BÀI TOÁN (Tổng các số chia hết cho 3 và 5)[4]

Phát biểu

Tính tổng chia hết cho 3 và chia hết cho 5 trongcác số tự nhiên nhỏ hơn n, ví dụ n=10, ta có S = 3 + 6 + 9 + 5 = 23.

Dữ liệu vào

- dòng thứ nhất chứa số nguyên T là số testcase ($1 \le T \le 10^5$).

- T dòng kế tiếp chứa số nguyên dương N ($1 \le N \le 10^9$).

Kết quả

- ứng với mỗi test case, in ra tổng S cần tìm.

Ví dụ

Dữ liệu vào	Kết quả
2 10 100	23 2318

Lời giải

[4]Euler001 Problem, https://www.hackerrank.com/contests/projecteuler/challenges/euler001

- Gọi A là tập các số chia hết cho 3, $A = \{3, 6, \dots, \frac{n}{3}\}.B = \{5, 10, \dots \frac{n}{5}\}$ là tập các số chia hết cho 5. Bài toán dễ dàng tính được tổng các phần tử chia hết cho 3 và 5 theo công thức cộng: Sum()= Sum(A) + Sum(B) - SUM(AB), trong đó $AB = \{15, 30, \dots \frac{n}{3\times5}\}$.

- Từ các tập A, B, AB trên ta đều rút ra được bài toán $S = 1 + 2 + \dots + x$, bài toán được giải quyết xong. Các bạn hãy tiếp tục công việc và Accept nó nhé.

Ngoài ra một vấn đề cần quan tâm khi làm với bài toán này đó là tổng trên thường có giá trị rất lớn, nên người ta sẽ chỉ lấy phần dư của phép chia modulo, trong trường hợp này các quy tắc về phép sử dụng modulo cần phải tuân theo, cụ thể:

1. (a + b) % c = ((a % c) + (b % c)) % c.

2. (a * b) % c = ((a % c) * (b % c)) % c.

3. (a – b) % c = ((a % c) – (b % c)) % c.

4. (a / b) % c NOT EQUAL TO ((a % c) / (b % c))

Phép chia modulo trong quy tắc 4 không như các quy tắc trên, cho nên trong trường hợp này cần phải có kỹ thuật xử lý phép chi cho thích hợp. Ví dụ bài toán sau:

BÀI TOÁN(Tổng bình phương n số tự nhiên)[5]

Phát biểu

Viết chương trình đọc vào hai số thực dương a và b và tính tổng bình phương tất cả các số nguyên không nhỏ hơn a và không lớn hơn b.

Dữ liệu vào

- Hai số thực dương a và b $0 \leq a \leq b \leq 10^9$

Kết quả

- in ra tổng S cần tìm, vì S lớn nên lấy phần dư khi chia cho $10^9 + 7$.

Ví dụ

Dữ liệu vào	Kết quả
0.4 2.67	5

Lời giải

Ta có $S = 1^2 + 2^2 + \dots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Vấn đề ở đây là có phép chia cho 6 trong quá trình modulo, nhiều bạn đã không giải được phép toán này. Vấn đề xử lý được thiết kế như sau:

- Tách tổng S trên thành ba phần là $S_1 = n; S_2 = (n+1); S_3 = (2n+1)$

- Nếu S_1 chia hết cho 2 thì $S1 = S1/2$ còn không $S2 = S2/2$ (Dễ thấy vì $S_2 = S_1 + 1$).

- Nếu S_1 chia hết cho 3 thì $S1 = S1/3$ còn không, nếu S_2 chia hết cho 3 thì $S2 = S2/3$ ngược lại $S_3 = S_3/3$

Như vậy phép chia cho 6 được xử lý xong, bài toán được giải quyết. Một lần nữa các bạn hãy tiếp tục công việc và Accept nó nhé.

Bài tập đề nghị.

[5] Câu a, vòng 7, http://tvkhoa.ddns.net:89/jury/scoreboard.php

Bài tập 5. http://codeforces.com/problemset/problem/622/F

Bài tập 6. http://www.spoj.com/problems/PWSUM/

Bài tập 7. http://www.spoj.com/problems/PWSUMC/

Tài liệu

[1] C. PÔLIA, **Sáng tạo toán học,** tập 1, Nhà xuất bản Giáo dục - Hà nội, 1975.